1 story

# 全国大学生数学竞赛历年真题

TsumugiWenders*

Neko University of Technology

October 14, 2020

*电子邮件: neko@nekopara.net

# 目录

## 1　第十一届全国大学生数学竞赛预赛 (2019 年非数学类)

一、填空题 (满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$________________

(2) 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$________________

(3) 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$________________

(4) 已知 $\mathrm{d}\,u(x,y)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$, 则 $u(x,y)=$________________

(5) 设 $a,b,c,\mu>0$, 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 则 $\mu=$________________

二、(满分 14 分) 计算三重积分 $\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

三、(满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

四、(满分 14 分) 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

五、(满分 14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ 证明: $c_n>0(n\ge 0)$, 极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

六、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足 $3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2}$, 且 $f(0)\le 1$ 证明：存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $|f(x)|\le M$

## 1.1 参考答案

一、(1) 原式 =

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(2) 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\int\frac{dx}{y^2}=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$. 解: 令 $y=tx$, 则 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$, $\quad y=\frac{1}{t(1-t)}$, $\quad dx=\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$, 这样, $\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$.

(3) 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$.

$$
\begin{aligned}
\text{解}:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\left.\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\left.\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

(4) 已知 $du(x,y)=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$, 则 $u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)+\mathrm{C}$. 解: $\quad du(x,y)=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2x}{y}+3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}d\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)$ 所以, $u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)+$ C.

(5) 设 $a,b,c,\mu>0$, 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切 , 则 $\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$. 解：根据题意有: $yz=\frac{2x}{a^2}\lambda, xz=\frac{2y}{b^2}\lambda$, $\quad xy=\frac{2z}{c^2}\lambda$, 以及 $\mu=2\lambda\frac{x^2}{a^2}$, $\quad\mu=2\lambda\frac{y^2}{b^2}$, $\quad\mu=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$, $\quad$ 从而得: $\mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}$, $\quad 3\mu=2\lambda$, 联立解得: $\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、采用“球面坐标”计算，并利用对称性，得

$$
\begin{aligned}
I&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)\\
&=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{72}
\end{aligned}
$$

三、证明: 设 $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2A}\right]$， 使得 $|f(x_0)| = \max\left\{| f(x) \| x \in \left[0, \frac{1}{2A}\right]\right\}$，

$$|f(x_0)| = |f(0) + f'(\xi)x_0| \le A|f(x_0)|\frac{1}{2A} = \frac{1}{2}|f(x_0)|, \quad \text{只有 } |f(x_0)| = 0$$

故当 $x \in \left[0, \frac{1}{2A}\right]$ 时， $f(x) \equiv 0$. 递推可得，对所有的 $x \in \left[\frac{k-1}{2A}, \frac{k}{2A}\right]$， $k = 1, 2, \cdots\cdots$，均有 $f(x) \equiv 0$.

四、解：设球面 $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 由球面参数方程

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta$$

知 $dS = \sin\theta d\theta d\phi$, 所以，所求积分可化为第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} e^{x-y} dS$$

设平面 $P_t$ : $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = t, -1 \le t \le 1$, 其中 $t$ 为平面 $P_t$ 被球面截下部分中心到原点距离. 用平面 $P_t$ 分割球面 $\Sigma$, 球面在平面 $P_t, P_{t+dt}$ 之间的部分形如圆台外表面状，记为 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y} = e^{\sqrt{2}t}$. 由于 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 半径为 $r_t = \sqrt{1 - \mathrm{t}^2}$, 半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2} = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 $h_t$, 则由微元法知 $dt^2 + \left(d\sqrt{1-t^2}\right)^2 = h_t^2$, 得到 $h_t = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 的面积为 $dS = 2\pi r_t h_t = 2\pi dt$

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}t} 2\pi \mathrm{dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{2}\pi\left(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}\right)$$

五、证明: □ $f(x)$ 为仅有正实根的多项式，不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, 这样

$$f(x) = A(x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_k)^{r_k}$$

其山 $r_i$ 为对应根 $a_i$ 的重数 $(i = 1, \cdots, k, r_k \ge 1)$.

$$f'(x) = Ar_1(x - a_1)^{r_1 - 1} \cdots (x - a_k)^{r_k} + \cdots + Ar_k(x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_k)^{r_k - 1}$$

所以, $f'(x) = f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{r_k}{x-a_k}\right)$， 从而， $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_1}} + \cdots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$

若$|x| < a_1$, 则
$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n + \cdots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{a_1 n+1} + \cdots + \frac{r_k}{a_k n+1}\right)x^n$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 有幂级数的唯一性知

$$c_n = \frac{r_1}{a_1 n + 1} + \cdots + \frac{r_k}{a_k n + 1} > 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{r_1}{a_1{}^{n+1}} + \cdots + \frac{r_k}{a_k{}^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1{}^{n+2}} + \cdots + \frac{r_k}{a_k{}^{n+2}}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1} r_k}{r_1 + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2} r_k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = a_1 \cdot \frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0} = a_1 > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\ln \frac{c_2}{c_1} + \cdots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n}\right) = \ln \frac{1}{a_1}$$

$$\sqrt[n]{c_n} = e^{\frac{\ln c_n}{n}} = e^{\frac{\ln c_1}{n} + \frac{1}{n}\left(\ln \frac{c_2}{c_1} + \cdots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n}\right)} \to e^{\ln \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{a_1}.$$

从而，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = a_1$, 即 $f(x)$ 的最小正根.

六、证明: 由于 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的严格增函数， 故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$( 有限或为 $+\infty$). 下面证明 $L \neq +\infty$. 记 $y = f(x)$, 将所给等式分离变量并积分得 $\int \frac{3+y^2}{(1+y^2)^2} \mathrm{d}y = \frac{2}{3} \int e^{-x^2} \mathrm{d}x$, 即

$$\frac{y}{1+y^2} + 2\arctan y = \frac{2}{3} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t + C$$

其中 $C = \frac{f(0)}{1+f^2(0)} + 2\arctan f(0)$, 若 $L = +\infty$, 则对上式取极限 $x \to +\infty$, 并利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 得 $C = \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3}$

另一方面， 令 $g(u) = \frac{u}{1+u^2} + 2\arctan u$, 则 $g'(u) = \frac{3+u^2}{(1+u^2)^2} > 0$, 所以函数 $g(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 因此 , 当 $f(0) \leq 1$ 时， $C = g(f(0)) \leq g(1) = \frac{1+\pi}{2}$, 但 $C > \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{2} > \frac{1+\pi}{2}$, 矛盾， 这就证明了 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ 为有限数.

最后，取 $M = \max\{|f(0)|, |L|\}$, 则 $|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0, +\infty)$.

## 2 第十届全国大学生数学竞赛预赛 (2018 年非数学类)

一、填空题 (本题共 4 个小题, 每小题 6 分, 共 24 分 )

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$, 则 $\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^a - n^a\right) =$ ____________

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\left\{\begin{array}{l} x=t+\cos t, \\ \mathrm{e}^y+ty+\sin t=1 \end{array}\right.$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____________

(3) $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}x =$ ____________

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$ ____________

二、( 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)-0$, 求函数 $f\left(x^2-y^2\right)$, 使得曲线积分 $\int_L\left[y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\right] \mathrm{d}x+x f\left(x^2-y^2\right) \mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $L$ 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线。

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在区间 [0,1] 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ 。证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$$

四、(12 分) 计算三重积分 $\iiint_{(V}\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}V$, 其中 $(V)$ 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9, z \geqslant 0$ 所围成的空心立体。

五、(14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M_{\circ} A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2,\ y_2\right.$ ) 是 $D$ 内两点, 线段 $AB$ 包含在 $D$ 内。证明 : $\left|f\left(x_1, y_1\right)-f\left(x_2, y_2\right)\right| \leqslant M|AB|$, 其中 $|AB|$ 表示线段 $AB$ 的长度。

六、(14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有 $\ln \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x) \mathrm{d}x_0$

七、(14 分) 已知 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正项级数, 且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta>0, k=1,2, \cdots, \delta$ 为一常数。证明: 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sqrt[k]{\left(a_1 a_2 \cdots a_k\right)\left(b_1 b_2 \cdots b_k\right)}}{b_{k+1} b_k}$ 收敛。

## 2.1 参考答案

一、

(1) 解　由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \left(1+\frac{1}{n}\right)$ , 则 $(n+1)^a - n^a = n^a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right) < n^a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$, 于是 $0 < (n+1)^a - n^a < \frac{1}{n^{1-a}}$, 应用两边夹法则 , 得 $\lim_{n\to+\infty}((n+1)^a - n^a) = 0$.

(2) 解当 $t=0$ 时 , $x=1, y=0$, 对 $x = t+\cos t$ 两边关于 $t$ 求导, 得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1-\sin t$, 故 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 1$. 对 $\mathrm{e}^y + ty + \sin t = 1$ 两边关于 $t$ 求得, 得 $\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \cos t = 0$, 故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -1$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}} = -1$

(3) 解法一：$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \overset{x=\tan t}{=} \int \frac{\ln(\tan t+\sec t)}{\sec t}\mathrm{d}t = \int \ln(\tan t+\sec t)\mathrm{d}\sin t$

$= \int \ln(\tan t+\sec t)\mathrm{d}\sin t = \sin t\ln(\tan t+\sec t) - \int \sin t\,\mathrm{d}\ln(\tan t+\sec t)$

$= \sin t\ln(\tan t+\sec t) - \int \sin t\frac{1}{\tan t+\sec t}\left(\sec^2 t+\tan t\sec t\right)\mathrm{d}t$

$= \sin t\ln(\tan t+\sec t) - \int \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t$

$= \sin t\ln(\tan t+\sec t) + \ln|\cos t| + C$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$

解法二：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C
\end{aligned}$$

(4) 解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}x^2}{+}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3
\end{aligned}$$

二、解设 $P(x,y)=y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right), Q(x,y)=xf\left(x^2-y^2\right)$, 由题设可知, 积分与路径无关, 于是有 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 由此可知 $\left(x^2-y^2\right)f'\left(x^2-y^2\right)+f\left(x^2-y^2\right)=1$ 。记 $t=x^2-y^2$, 则得微分方程 $tf'(t)+f(t)=1$, 即 $(tf(t))'=1$, 从而得 $tf(t)=t+C$. 又 $f(1)=0$, 可得 $C=-1$, 于是得 $f(t)=1-\frac{1}{t}$, 从而 $f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$

三、证明由柯西不等式得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=1$ 。又由于 $(f(x)-1)(f(x)-3)\leqslant 0$, 则 $(f(x)-1)(f(x)-3)/f(x)\leqslant 0$, 即

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\leqslant 4,\ \text{从而}\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\leqslant 4$$

由于

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

故 $1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}$

四、解 (1) $\left(V_1\right):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-1=r\cos\varphi\\0\leqslant r\leqslant 3, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$

$$\iiint_{\left(V_1\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\cdot 3^5\cdot\pi$$

(2) $\left(V_2\right):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z-2=r\cos\varphi\\0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$

$\iiint_{\left(V_2\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\cdot 2^5\cdot\pi$

(3) $\left(V_3\right):\begin{cases}x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0,\\0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$

$\iiint_{\left(V_3\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\iint_{r\leqslant 3\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{9-r^2}-1\right)\mathrm{d}r=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi$

$\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\left(V_1\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{\left(V_2\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{\left(V_3\right)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\frac{256}{3}\pi$

五、证明　作辅助函数 $\varphi(t)=f\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right), y_1+t\left(y_2-y_1\right)\right)$, 显然 $\varphi(t)$ 在 [0,1] 上可导。根据拉格朗日中值定理, 存在 $c\in(0,1)$, 使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)$$

于是

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f\left(x_2, y_2\right)-f\left(x_1, y_1\right)|=\left|\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)\right| \\
\leqslant\left[\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\right)^2\right]^{1/2}\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2\right]^{1/2} \leqslant M|AB|
\end{aligned}
$$

六、证明由于 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 所以 $\int_0^1 f(x) \mathrm{d} x=\lim_{x \rightarrow+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x_k\right)$, 其中 $x_k \in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. 由不等式 $\left(f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) \cdots f\left(x_n\right)\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x_k\right)$, 根据 $\ln x$ 的单调性有 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(x_k\right) \leqslant \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x_k\right)\right)$ 根据 $\ln x$ 的连续性, 两边取极限有

$$
\lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(x_k\right)\right) \leqslant \lim \ln_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x_k\right)\right), \text{ 即得 } \int_0^1 \ln f(x) \mathrm{d} x \leqslant \ln \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x
$$

七、证明　令 $S_k=\sum_{i=1}^k a_i b_i$, 则 $a_k b_k=S_k-S_{k-1}, S_0=0, a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2, \cdots$

$$
\sum_{k=1}^N a_k=\sum_{k=1}^N \frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{K=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}=\sum_{i=1}^{N-1} \frac{b_{k+1}-b_k}{b_k b_{k+1}} S_k+\frac{S_N}{b_N} \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k
$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛。

## 3 第九届全国大学生数学竞赛预赛 (2017 年非数学类)

一、填空题 (本题共 6 个小题, 每小题 7 分, 共 42 分 )

(1) 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$, 则 $f(x)=$ ______________

(2) 极限 $\lim_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ______________

(3) 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u=x-cy, v=x+cy$, 其中 $c$ 为非零常数，则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$ ______________

(4) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$ ______________

(5) 不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$ ______________

(6) 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 $V$, 则三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ______________

二、(14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任何角度 $\alpha$, 定义一元函数

$$g_a(t)=f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$$

若对任何 $\alpha$ 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2 g_a(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

三、(14 分) 设曲线 $\Gamma$ 为在

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x+z=1,\quad x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$

四、(15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续。若对任意实数 $t$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$$

则 $\forall a,b(a<b)$, 有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}$

五、(15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列 , $p$ 为固定的正整数。若 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 其中 $\lambda$ 为常数. 证明 : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$ 。

### 3.1 参考答案

一、(1) 解在方程两边求导得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1,\ 即 f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$$

从而

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x\end{aligned}$$

由于 $f(0)=1$, 故得 $C=1$, 即 $f(x)=\sin x+\cos x$

(2) 解由于 $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$, 故 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$ $\operatorname{limsin}_{n\to\infty}\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1$

(3) 解 $\quad w_x=f_1'+f_2', w_{xx}=f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}'', w_y=c\left(f_2'-f_1'\right)$

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2'-f_1'\right)=c\left(cf_{11}''-cf_{12}''-cf_{21}''+cf_{22}''\right)=c^2\left(f_{11}''-2f_{12}''+f_{22}''\right)$$
$$所以 w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}''$$

(4) 解由麦克劳林公式有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 所以 $f\left(\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$, 这样 $\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{x^4}=3$

(5) 解

$$\begin{aligned}I&=2\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x\overset{\sin x=v}{\Longrightarrow}2\int\frac{v\mathrm{e}^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{(v-1+1)\mathrm{e}^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v\\&=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v+2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\int\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}\frac{1}{v-1}\\&=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\left(\mathrm{e}^{-v}\frac{1}{v-1}+\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\right)=-\frac{2\mathrm{e}^{-v}}{v-1}+C=\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C\end{aligned}$$

(6) 解使用球面坐标, 则

$$\begin{aligned}I&=\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=2\pi\end{aligned}$$

二、解　由于 $\frac{\mathrm{d}g_a(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 $\alpha$ 成立, 故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$, 即 (0,0) 是 $f(x,y)$ 的驻点。

记$\boldsymbol{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$\frac{\mathrm{d}^2g_a(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\boldsymbol{H}_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立, 故 $\boldsymbol{H}_f(0,0)$ 是一个正定矩阵, 从而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

三、解　记 $\Gamma_1$ 为从 $B$ 到 $A$ 的直线段, 则 $x=t,y=0,z=1-t,0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\int_{\Gamma_1}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}$$

设 $\Gamma$ 和 $\Gamma_1$ 围成的平面区域为 $\Sigma$, 方向按右手法则, 由斯托克斯公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

右边 3 个积分都是 $\Sigma$ 在各个坐标面上的投影面积, 而 $\Sigma$ 在 $zx$ 面上投影面积为零, 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲线 $\Gamma$ 在 $xy$ 面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1$$

由该投影 (半个椭圆) 的面积得知 $\int_\Sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$。同理可得 , $\iint_\Sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 这样就有 $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

四、证明由于 $\forall a,b(a<b)$, 有 $\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$, 因此

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant b-a$$

然而

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中
$$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t=\int_a^x \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t+\int_x^b \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t=2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}$$
这样就有
$$\int_a^b f(x)\left(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}\right)\mathrm{d}x\leqslant b-a(*)$$
即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b \mathrm{e}^{a-x}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{e}^{x-b}f(x)\mathrm{d}x\right]$$
注意到
$$\int_a^b \mathrm{e}^{a-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{e}^{-|a-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,\text{ 和}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{x-b}\mathrm{d}x\leqslant 1$$
把以上两个式子代入（*）式, 即得结论。

五、证明　对于 $i=0,1,\cdots,p-1$, 记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)_p+i}-a_{np+i}$, 由题设得 $\lim_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$, 从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda_0$$
而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$ 由题设知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$
对正整数 $m$, 设 $m=np+i$, 其中 $i=0,1,\cdots,p-1$, 从而可以把正整数依照 $i$ 分为 $p$ 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p},\text{ 故}\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$$

## 4 第八届全国大学生数学竞赛预赛 (2016 年非数学类)

一、填空题 (本题共 5 个小题, 每小题 6 分, 共 30 分 )

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则 $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}=$ ________

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在, 求极限 $I=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^{2}x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(\mathrm{e}^{x^{2}}-1\right)\sin x}$

(3) 若 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$, 记 $z=f\left(\mathrm{e}^{x}y^{2}\right)$, 若 $\frac{\partial z}{\partial x}=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式。

(4) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$, 求 $f^{(4)}(0)$

(5) 求曲面 $z=\frac{x^{2}}{2}+y^{2}$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

二、(14 分) 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上可导 , $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1)$ 时 , $0<f'(x)<1$ 。试证: 当 $a\in(0,1)$ 时, 有

$$\left(\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\right)^{2}>\int_{0}^{a}f^{3}(x)\mathrm{d}x$$

三、(14 分) 某物体所在的空间区域为

$$\Omega: x^{2}+y^{2}+2z^{2}\leqslant x+y+2z$$

密度函数为 $x^{2}+y^{2}+z^{2}$, 求质量

$$M=\iiint_{\Omega}\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

四、( 14 分 ) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 [0,1] 上具有连续导数 , $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

五、( 14 分 ) 设函数 $f(x)$ 在区间 [0,1] 上连续, 且 $I=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 证明: 在 (0,1) 内存在不同的两点 $x_{1}, x_{2}$, 使得

$$\frac{1}{f\left(x_{1}\right)}+\frac{1}{f\left(x_{2}\right)}=\frac{2}{I}$$

六、(14 分 ) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且

$$f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$$

用傅里叶级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

### 4.1 参考答案

一、

(1) 解

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\right]^{\frac{n\left(f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{f(a)}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x} = 3\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2} \\
&= 3\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2} \\
&= 3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2} = 3f'(1)\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right) \\
&= 3f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}f'(1)
\end{aligned}
$$

(3) 解由题设, 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\mathrm{e}^x y^2\right)\cdot \mathrm{e}^x y^2=f\left(\mathrm{e}^x y^2\right)$ 。令 $\mathrm{e}^x y^2=u$, 则当 $u>0$ 时, 有

$$
f'(u)u=f(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}f(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\mathrm{d}u
$$

积分得 $\ln f(u)=\ln u+C_1$, 即 $f(u)=Cu$。又由初值条件得 $f(u)=2u$。所以, 当 $x>0$ 时 , $f(x)=2x$。

（4）解将 $\mathrm{e}^x$ 和 $\sin 2x$ 展开为带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式, 有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^4\right)\right) \\
&= 2x+2x^2+\left(1-\frac{2^3}{3!}\right)x^3+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^3}{3!}\right)x^4+o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

所以有 $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{2}{3!}-\frac{8}{3!}=-1$, 即 $f^{(4)}(0)=-24$.

(5) 解　曲面在 $(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$ 。又切平面与已知平面平行, 从而两平面的法向量平行, 所以有

$$
\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}
$$

从而 $x_0=2, y_0=1$, 得 $z_0=3$, 所以切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0, \quad 即 \quad 2x+2y-z=3$$

二、证明　设 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$, 下证 $F'(x)>0$ 再设 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则 $F'(x)=f(x)g(x)$, 由于 $f'(x)>0, f(0)=0$, 故 $f(x)>0$. 从而只要证明 $g(x)>0(x>0)$ 。而 $g(0)=0$. 因此只要证明 $g'(x)>0(0<x<a)$ 。而

$$g'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0$$

所以 $g(x)>0, F'(x)>0, F(x)$ 单调增加 , $F(a)>F(0)$, 即

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$$

三、解由于 $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1$ 是一个各轴长分别为 $1,1,\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭球, 它的体积为 $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$。做变换 $u=x-\frac{1}{2}, v=y-\frac{1}{2}, w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$ , 将区域变成单位球 $\Omega': u^2+v^2+w^2 \leqslant 1$, 而 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_{u^2+v^2+w^2<1}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w。\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4\pi}{3}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)_{u^2+v^2+w^2\leq 1}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

而 $\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi_0$ 所以 $M=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$

四、证明　将区间 [0,1] 分成 $n$ 等份, 设分点为 $x_k=\frac{k}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$, 则 $\Delta x_k=\frac{1}{n}$

且

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-f\left(x_k\right)\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f\left(x_k\right)}{x-x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\xi_k\right)-f\left(x_k\right)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right) \quad \left(\xi_k\in\left(x_{k-1},x_k\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right) \quad \left(\eta_k\in\left(\xi_k,x_k\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\left[-\frac{1}{2}\left(x_{k-1}-x_k\right)^2\right]\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'\left(\eta_k\right)\Delta x_k\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

五、证明　设 $F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0, F(1)=1$ 。由介值定理，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}$ 。在区间 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 得

$$
F'\left(x_1\right)=\frac{f\left(x_1\right)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{\xi}, \quad x_1\in(0,\xi)
$$

$$
F'\left(x_2\right)=\frac{f\left(x_2\right)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\xi}, \quad x_2\in(\xi,1)
$$

所以

$$
\frac{I}{f\left(x_1\right)}+\frac{I}{f\left(x_2\right)}=\frac{\xi}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\xi}{\frac{1}{2}}=2, \quad \text{即} \quad \frac{1}{f\left(x_1\right)}+\frac{1}{f\left(x_2\right)}=\frac{2}{I}
$$

六、证明由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知 , $f$ 是以 $2,\sqrt{3}$ 为周期的周期函数, 所以, 它的傅里叶系数为

$$
a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x, \quad b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x
$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$, 所以

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

故有 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$; 同理可得

$$b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi。$$

联立, 有

$$\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$$

解得 $a_n=b_n=0(n=1,2,\cdots)$ 而 $f(x)$ 可导, 其傅里叶级数处处收敛于 $f(x)$, 所以有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 为常数。

## 5 第七届全国大学生数学竞赛预赛 (2015 年非数学类)

一、计算下列各题 (本题共 5 个小题, 每小题 6 分, 共 30 分 ) (要求写出重要步骤)

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ _________

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ _________ (本小题结果要求不显含 $F$ 及其偏导数

（3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 _________

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 (-5,5] 内的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值为 _________

( 5 ) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t$, 则 $u(x)$ 的初等函数表达式为 _________

二、(12 分) 设 $M$ 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程。

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内二次可导, 且存在常数 $\alpha,\beta$ 使得对于 $\forall x\in(a,b), f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$, 证明 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内无穷次可导。

四、( 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数。

五、( 16 分 ) 设函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ 。试证: (1) $\exists x_0\in[0,1]$, 使得 $|f(x_0)|>4$; (2) $\exists x_1\in[0,1]$, 使得 $|f(x_1)|=4$ 。

六、(16 分 ) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数 , $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$。若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明 $\left|\iint_{x^2+y^2\leq 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$

## 5.1 参考答案

一、(1) 解　由于 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$, 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=1\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼准则, 可得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}$ 。

(2) 解方程两端关于 $x$ 求偏导数, 可得

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0,\ \text{解得}x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left(zF_v-x^2F_u\right)}{xF_u+yF_v}\square$$

类似地, 对 $y$ 求偏导数可得

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\left(zF_u-y^2F_v\right)}{xF_u+yF_v}$$

于是，有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy\left(xF_u+yF_v\right)+z\left(xF_u+yF_v\right)}{xF_u+yF_v}=z-xy$$

（3）解曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面为

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\ \text{即}\quad z=2x-2y-1$$

联立 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2x-2y-1 \end{cases}$ 得所围区域在 $xOy$ 面上的投影 $D$ 为

$$D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1\right\}$$

所求体积为

$$V=\iint_{D}\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_{D}\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}\sigma$$

令 $x-1=r\cos t, y+1=r\sin t$, 则 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}t\mathrm{d}r, D:\begin{cases} 0\leqslant t\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant 1 \end{cases}$ 所以

$$V=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}t\int_{0}^{1}\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

(4) 解由狄利克雷收敛定理, 得 $S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{3}{2}$ 。

（5）解法 **1**　$u^2(x)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}s=\iint_{s,t\geqslant 0}\mathrm{e}^{-x\left(s^2+t^2\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\Longrightarrow\overset{\text{极坐标}}{=}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4x}$ 所以 $u(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$

解法 2　令 $u=xt^2$, 则 $\mathrm{d}u=2xt\mathrm{d}t$, 于是

$$u(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

二、解　显然 $O(0,0,0)$ 为 $M$ 的顶点 , $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 在 $M$ 上。由 $ABC$ 三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 $L$ 是 $M$ 的准线。设 $P(x,y,z)$ 是 $M$ 上的点 , $(u,v,w)$ 是 $M$ 的母线 $OP$ 与 $L$ 的交点, 则 $OP$ 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t},\ \text{即}\quad u=xt,v=yt,w=zt$$

代人准线方程, 得

$$\begin{cases}(x+y+z)t=1\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)t^2=1\end{cases}$$

消去 $t$, 得圆雉面 $M$ 的方程为 $xy+yz+zx=0$

三、证明 ( 1 ) 若 $\beta=0$, 则 $\forall x\in(a,b)$, 有

$$f'(x)=\alpha f(x),f''(x)=\alpha^2f(x),\cdots,f^{(n)}(x)=\alpha^nf(x),\cdots$$

从而 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内无穷次可导。

(2) 若 $\beta\neq0$, 则 $\forall x\in(a,b)$, 有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1f'(x)+B_1f(x)$$

其中 $A_1=\frac{1}{\beta},B_1=-\frac{\alpha}{\beta}$ 。因为 ( 1 ) 式右端可导, 从而有

$$\begin{aligned}f'''(x)&=A_1f''(x)+B_1f'(x)\\ \text{设}f^{(n)}(x)&=A_1f^{(n-1)}(x)+B_1f^{(n-2)}(x),n>1,\ \text{则}\\ f^{(n+1)}(x)&=A_1f^{(n)}(x)+B_1f^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

所以 , $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内无穷次可导。

四、解　因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$, 所以收敛半径 $R=+\infty$, 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ 。由

$$\begin{aligned}\frac{n^3+2}{(n+1)!}&=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\\ &=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\geqslant2)\end{aligned}$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用 $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和, 依据 $\mathrm{e}^x$ 的幂级数展开式可得到

$$\begin{aligned}
& S_1(x)=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+2}}{n!}=(x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2 \mathrm{e}^{x-1} \\
& S_2(x)=\mathrm{e}^{x-1} \\
& S_3(x)=\textstyle\frac{1}{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}(x \neq 1)
\end{aligned}$$

综合上述讨论, 可得幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}\left(x^2-2 x+2\right) \mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x-1}\left(\mathrm{e}^{x-1}-1\right), & x \neq 1 \\ 2, & x=1\end{cases}$$

五、证明　(1) 反证法。若 $\forall x \in[0,1],|f(x)| \leqslant 4$, 则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right) f(x) \mathrm{d} x \leqslant \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)| \mathrm{d} x \leqslant 4 \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right| \mathrm{d} x=1$$

因此 , $\int_0^1|f(x)|\left|x-\frac{1}{2}\right| \mathrm{d} x=1$ 。而 $4 \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right| \mathrm{d} x=1$, 故

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|) \mathrm{d} x=0$$

所以对于任意的 $x \in[0,1],|f(x)|=4$□ 又由 $f(x)$ 的连续性知

$$f(x) \equiv 4 \quad \text{或} \quad f(x) \equiv-4$$

这与条件 $\int_0^1 f(x) \mathrm{d} x=0$ 矛盾。所以 $\exists x_0 \in[0,1]$, 使得

$$\left|f\left(x_0\right)\right|>4$$

(2) 先证 $\exists x_2 \in[0,1]$ 使得 $\left|f\left(x_2\right)\right|<4$ 。若不然, $\forall x \in[0,1],|f(x)| \geqslant 4$, 则 $f(x) \geqslant 4$ 或 $f(x) \leqslant-4$ 恒成立, 这与 $\int_0^1 f(x) \mathrm{d} x=0$ 矛盾。再由 $f(x)$ 的连续性及 (1) 的结果, 利用介值定理, 可得 $\exists x_1 \in[0,1]$ 使得 $\left|f\left(x_1\right)\right|=4$ 。

六、证明　在 (0,0) 处展开 $f(x,y)$ 得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(\theta x,\theta y), \end{aligned}$$

$$\theta\in(0,1)$$

$$\text{记}(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial x^\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y),$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+wy^2\right)$$

由于$\|(u,\sqrt{2}v,w)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}$ 以及

$$\left\|\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\right\|=x^2+y^2$$

于是有

$$\left|(u,\sqrt{2}v,w)\cdot\left(x^2,\sqrt{2}xy,y^2\right)\right|\leqslant\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)$$

即 $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)$, 从而

$$\left|\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\left|\frac{\sqrt{M}}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

## 6 第六届全国大学生数学竞赛预赛 (2014 年非数学类)

一、填空题 (本题共 5 个小题, 每小题 6 分, 共 30 分 )

(1) 已知 $y_1=\mathrm{e}^x$ 和 $y_2=x\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次常系数线性微分方程的解, 则该方程是 _________

（2) 设有曲面 $S: z=x^2+2y^2$ 和平面 $L: 2x+2y+z=0$, 则与 $L$ 平行的 $S$ 的切平面方程是 _________

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$_________

(4) 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$_________

(5) 已知 $\lim_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 则 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$_________

二、(12 分) 设 $n$ 为正整数, 计算 $I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$.

三、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上有二阶导数, 且有正常数 $A,B$ 使得 $|f(x)|\leqslant A$,$|f''(x)|\leqslant B$。证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$ 。

四、(14 分)(1) 设一球缺高为 $h$, 所在球的半径为 $R$。证明: 该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 $\Omega$。记球缺上的球冠为 $\Sigma$, 方向指向球外, 求第二型曲面积分 $I=\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

五、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x$ , 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

六、(15 分) 设 $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$

## 6.1 参考答案

一、(1) 解　由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根, $r=1$, 故所求微分方程为 $y''-2y'+y=0$

(2) 解　设 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是 $S$ 上一点, 则 $S$ 在点 $P_0$ 的切平面方程为

$$-2x_0\left(x-x_0\right)-4y_0\left(y-y_0\right)+\left(z-z_0\right)=0$$

由于该切平面与平面 $L$ 平行, 所以相应的法向量成比例，即存在常数 $k\neq 0$, 使得

$$(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$$

解得 $x_0=-1,y_0=-\frac{1}{2},z_0=\frac{3}{2}$, 所以所求切平面方程为

$$2x+2y+z+\frac{3}{2}=0$$

（3）解　显然 $y(0)=1$, 等式两端对 $x$ 求导, 得

$$1=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot(y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1$$

将 $x=0$ 代人可得 $y'=3$ 。

(4) 解　$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$ 。所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$

(5) 解　由 $\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$$

故有 $\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha$, 其中 $\alpha\to 0(x\to 0)$, 即有

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha+3)x}{x}-1=2$$

二、解

$$\begin{aligned}I&=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln x)\right|\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}|\sin(\ln x)|\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}|\sin(\ln x)|\mathrm{d}\ln x\end{aligned}$$

令 $\ln x=u$, 则有

$$I=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u=\int_{0}^{2n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=4n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=4n$$

三、证明由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x)+f'(x)(0-x)+\tfrac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\quad \xi\in(0,x)\\ f(1)&=f(x)+f'(x)(1-x)+\tfrac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\quad \eta\in(x,1)\end{aligned}$$

上面两式相减, 得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2$$

由 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$, 得

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right]$$

又 $x^2+(1-x)^2$ 在 [0,1] 上的最大值为 1, 所以有

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$$

四、(1) 证明　设球缺所在球表面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 球缺的中心线为 $z$ 轴, 且设球缺所在的圆雉顶角为 $2\alpha$。记球缺的区域为 $\Omega$, 则其体积为

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_{R-h}^{R}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$$

由于球面的面积元素为 $\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$, 所以球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh$$

（2) 解　记球缺的底面圆为 $P_1$, 方向指向球缺外, 且记

$$J=\iint_{P_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由高斯公式得 $I+J=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=3V(\Omega)$, 其中 $V(\Omega)$ 为 $\Omega$ 的体积。由于平面 $P$ 的正向单位法向量为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 故

$$J=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}\sigma\left(P_1\right)=-2\sqrt{3}\sigma\left(P_1\right)$$

其中 $\sigma\left(P_1\right)$ 为 $P_1$ 的面积，

$$I=3V(\Omega)-J=3V+2\sqrt{3}\sigma\left(P_1\right)$$

由于球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$, 而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$, 故球缺的高度为 $h=|QD|=\sqrt{3}$, 再由 (1) 所证并代人 $h=\sqrt{3}, R=2\sqrt{3}$, 得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi$$

五、解　考虑特殊情形 : $a=0, b=1$ 下面证明 $\lim_{n\to\infty} x_n=1$ 。首先 , $x_n\in[0,1]$, 即 $x_n\leqslant 1$, 只要证明 $\forall\varepsilon>0(<1), \exists N$, 当 $n>N$ 时 $x_n>1-\varepsilon$。由 $f(x)$ 在 [0,1] 上严格单增, 就是要证明

$$f^n(1-\varepsilon)<\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\int_0^1\left[f\left(x_n\right)\right]^n \mathrm{d}x$$

由于 $\forall c\in(0,1)$, 有

$$\int_c^1[f(x)]^n \mathrm{d}x>f^n(c)\cdot(1-c)$$

现取 $c=1-\frac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1-\varepsilon)<f(c)$, 即 $\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$, 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0$$

所以 $\exists N, \forall n>N$ 时有

$$\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\frac{\varepsilon}{2}=1-c$$

即

$$f^n(1-\varepsilon)<[f(c)]^n(1-c)\leqslant\int_c^1[f(x)]^n \mathrm{d}x\leqslant\int_0^1[f(x)]^n \mathrm{d}x=f^n\left(x_n\right)$$

从而 $1-\varepsilon<x_n$, 由 $\varepsilon$ 的任意性得 $\lim_{n\to\infty} x_n=1$ 。再考虑一般情形, 令 $F(t)=f(a+t(b-a))$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 知 $F$ 在 [0,1] 上非负连续, 严格单增。从而 $\exists t_n\in[0,1]$, 使得 $F^n\left(t_n\right)=\int_0^1 F^n(t)\mathrm{d}t$, 且 $\lim_{n\to\infty} t_n=1$, 即

$$f^n\left(a+t_n(b-a)\right)=\int_0^1 f^n(a+t(b-a))\mathrm{d}t$$

记 $x_n=a+t_n(b-a)$, 则有

$$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n \mathrm{d}x, \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} x_n=a+(b-a)=b$$

六、解　令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 因为 $A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}$, 所以有

$\lim_{n\to\infty} A_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

记$x_i=\frac{i}{n}$, 则$x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}, A_n=\sum_{i=1}^n\int_{x_i-1}^{x_i} f\left(x_i\right)\mathrm{d}x$。令

$J_n=n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(x_i\right)\right]\mathrm{d}x$

由拉格朗日中值定理, $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$J_n = n \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\left(\xi_i\right)\left(x - x_i\right) \mathrm{d}x$$

记 $m_i, M_i$ 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_i - 1, x_i]$ 上的最小值和最大值, 则 $m_i \leqslant f'\left(\xi_i\right) \leqslant M_i$, 故积分

$$\int_{x_i-1}^{x_i} f'\left(\xi_i\right)\left(x - x_i\right) \mathrm{d}x \text{ 介于} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x - x_i\right) \mathrm{d}x, M_i \int_{x_i-1}^{x_i}\left(x - x_i\right) \mathrm{d}x$$

之间, 所以 $\exists \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\left(\xi_i\right)\left(x - x_i\right) \mathrm{d}x = -f'\left(\eta_i\right) \frac{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}{2}$$

于是, 有 $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} f'\left(\eta_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} f'\left(\eta_i\right)$ 。从而

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = \lim_{n \to \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}$$

## 7 第五届全国大学生数学竞赛预赛 (2013 年非数学类)

一、解答下列各题 (本题共 4 个小题, 每小题 6 分, 共 24 分 )

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$

(2) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定, 求 $y(x)$ 的极值

(4) 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geqslant 0)$ 上的点 $A$ 作切线, 使该切线与曲线及 $x$ 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求 $A$ 点的坐标。

二、(12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛

四、(10 分) 设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$ 。证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$

五、(14 分) 设 $\Sigma$ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外。给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试确定曲面 $\Sigma$, 使得积分 $I$ 的值最小, 并求该最小值。

六、(14 分 ) 设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 $a$ 为常数, 曲线 $C$ 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向。求极限 $\lim_{r\to+\infty}I_a(r)$ 。

七、(14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和

### 7.1 参考答案

一、(1) 解因为 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)^n=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)\right]\\
&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

(2) 证明　记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$, 只要证明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散。因为

$$
a_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)\pi}
$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散。

（3）解方程两边对 $x$ 求导, 得

$$
3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0
$$

故 $y'=\frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$, 令 $y'=0$, 得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$ 。将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 代入所给方程, 得

$$
\begin{cases}x=0,\\ y=-1\end{cases}\text{和}\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}
$$

又

$$
y''=\left.\frac{\left(2y^2-x^2\right)\left(2x+2xy'+2y\right)-\left(x^2+2xy\right)\left(4yy'-2x\right)}{\left(2y^2-x^2\right)^2}\right|_{\substack{x=0 y=-1\\ y'=0}}=-1<0,y''\,|_{\substack{x=-2 y=1\\ y'=0}}>0
$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值, $y(-2)=1$ 为极小值。

（4）解设切点 $A$ 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$, 曲线过 $A$ 点的切线方程为

$$
y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)
$$

令 $y=0$, 由上式可得切线与 $x$ 轴交点 $B$ 的横坐标 $x_0=-2t$。设 $A$ 在 $x$ 轴上的投影点为 $C$ 。如题 (4) 图所示平面图形 $\triangle ABC$ 的面积一曲边梯形 $OCA$ 的面积

$$
S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1
$$

故 $A$ 的坐标为 (1,1) 。

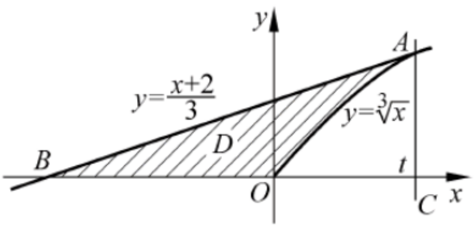


图 1: 题 (4) 图

二、解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{0} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{s}^{x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} \left(\arctan \mathrm{e}^{x} + \arctan \mathrm{e}^{-x}\right) \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \arctan(\cos x)\Big|_{0}^{\pi} \\
&= \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}
$$

三、证明由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 则

$$
f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0
$$

应用洛必达法则, 得

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0)
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|
$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛

四、　证法 1 因为 $f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增, 从而有反函数。设 $A=f(a),B=f(b),\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则

$$
0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m}
$$

又 $f(x)\leqslant\pi$, 则 $-\pi\leqslant A<B\leqslant\pi$, 所以

$$
\left|\int_{a}^{b}\sin f(x)\mathrm{d}x\right| \xRightarrow{x=\varphi(y)} \left|\int_{A}^{B}\varphi'(y)\sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{0}^{\pi}\frac{1}{m}\sin y\mathrm{d}y=\frac{2}{m}
$$

证法 **2** $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \frac{f'(x)\sin f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{m}\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}f(x)\right| = \frac{1}{m}\left|[-\cos f(x)]_a^b\right| \leqslant \frac{2}{m}$

五、解　记 $\Sigma$ 围成的立体为 $V$, 由高斯公式,

$$I=\iiint_V\left(3x^2+6y^2+9z^2-3\right)\mathrm{d}v=3\iiint_V\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为了使 $I$ 达到最小, 就要求 $V$ 是使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0$ 的最大空间区域, 即

$$V=\left\{(x,y,z)\mid x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1\right\}$$

所以 $V$ 是一个椭球 ,$\Sigma$ 是椭球 $V$ 的表面时, 积分 $I$ 最小。为求该最小值, 作变换

$$\begin{cases} x=u \\ y=\frac{v}{\sqrt{2}} \\ z=\frac{w}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

则 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\sqrt{6}}$, 有 $I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1}\left(u^2+v^2+w^2-1\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$。使用球坐标变换, 得

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(r^2-1\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi$$

六、做变换

$$\begin{cases} x=\frac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

曲线 $C$ 变为 $uOv$ 平面上的曲线 $\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$, 也是取正向, 且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$, $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v$

$$I_a(r)=\int_\Gamma\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{\left(u^2+v^2\right)^a}$$

作变换

$$\begin{cases} u=\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}r\sin\theta \end{cases}$$

则有$v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\mathrm{d}\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{-2(1-a)}J_a$$

,

其中$J_a=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}, 0<J_a<+\infty$

因此当 $a>1$ 和 $a<1$ 时, 所求极限分别为 0 和十 $\infty$。而当 $a=1$ 时,

$$\begin{aligned} J_1&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta\left(\frac{2}{3}+2\tan^2\theta\right)} \\ &=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+t^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\arctan\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty} I_a(r)=\begin{cases} 0 & a>1 \\ -\infty, & a<1 \\ -2\pi, & a=1 \end{cases}$$

七、解 (1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n=1,2,3,\cdots$, 因为 $n$ 充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n}$$

所以 $u_n\leqslant\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

(2) $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$,

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)\\ &=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)\\ &=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}\left(a_2-a_1\right)+\frac{1}{4}\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(a_n-a_{n-1}\right)-\frac{1}{n+2}a_n\\ &=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n \end{aligned}$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$, 所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$ 。故 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$ 。于是 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$

## 8　第四届全国大学生数学竞赛预赛 (2012 年非数学类)

一、解答下列各题 (本题共 5 个小题, 每小题 6 分, 共 30 分 ) (要求写出重要步逐)

(1) 求极限 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$ 。

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\ 5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$, 使其中一个平面过点 (4,-3,1) 。

(3) 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, 确定常数 $a$ 和 $b$, 使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微 , $u(2)=1$, 且 $\int_L(x+2y)u\mathrm{d}x+\left(x+u^3\right)u\mathrm{d}y$ 在右半平面与路径无关, 求 $u(x)$ 。

(5) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$

二、(10 分) 计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$

三、(10 分) 求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001 。

四、(12 分) 设函数 $y=f(x)$ 的二阶导数连续, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim_{x\to0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 $u$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 $x$ 轴上的截距。

五、(12 分) 求最小的实数 $C$, 使得满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$

六、(12 分) 设 $F(x)$ 为连续函数, $t>0$ 。区域 $\Omega$ 是由抛物线 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的部分。定义三重积分

$$F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$ 。

七、(14 分) 设 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 与 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 为正项级数。

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$, 且 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 发散。

## 8.1　参考答案

一、(1) 因为　$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$, 而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!) \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\ 且 \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0,\quad 故 \lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$$

（2) 解过直线 $L$ 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$$

即

$$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$$

若平面 $\pi_1$ 过点 $(4,-3,1)$, 代人得 $\lambda+\mu=0$, 即 $\mu=-\lambda$, 从而 $\pi_1$ 的方程为

$$3x+4y-z+1=0$$

若平面束中的平面 $\pi_2$ 与 $\pi_1$ 垂直, 则

$$3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0$$

解得 $\lambda=-3\mu$, 从而平面 $\pi_2$ 的方程为 $x-2y-5z+3=0$ 。

(3) 解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$,　$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right]$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right]$$

若使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$, 只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$$

即 $a=b=1$ 。

(4) 解　由 $\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(x+u^{3}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}((x+2y)u)$ 得 $\left(x+4u^{3}\right)u^{\prime}=u$, 即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-\frac{1}{u}x=4u^{2}$, 方程通解为

$$x=\mathrm{e}^{\ln u}\left(\int 4u^{2}\mathrm{e}^{-\ln u}\mathrm{d}u+C\right)=u\left(\int 4u\mathrm{d}u+C\right)=u\left(2u^{2}+C\right)$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$, 故 $u=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 。

(5) 解因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}\leqslant 2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\rightarrow 0\quad(x\rightarrow+\infty)$$

所以 $\lim_{x\rightarrow+\infty}\sqrt[3]{x}\int_{x}^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$

二、解由于

$$\int_{0}^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2k\pi}\left(1+\mathrm{e}^{2\pi}\right)$$

所以

$$\int_{0}^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left(1+\mathrm{e}^{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-2k\pi}=\frac{1}{5}\left(1+\mathrm{e}^{2\pi}\right)\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}-\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}$$

当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，

$$\int_{0}^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x\leqslant\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x<\int_{0}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$$

令 $n\rightarrow\infty$, 由夹逼准则，得

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{x\rightarrow\infty}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}$$

注　如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_{0}^{n\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}$$

需先说明 $\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$ 收敛。

三、解由泰勒公式有

$$\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^{2},\quad 0<\theta<1$$

令 $t=\frac{1}{x}$ 得 $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^{2}}$, 代人原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501,\ 即x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)$$

由此知 $x>500, 0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$，

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{\theta}{x} \leqslant \frac{1}{1000}=0.001$$

所以 , $x=501$ 即为满足题设条件的解。

四、解　曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

令 $Y=0$, 则有 $X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, 由此 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, 且有

$$\lim_{x\to 0} u=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$

得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}&=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{xf'(x)}\\&=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o\left(u^2\right)\right)}{u^3\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2$$

五、解由于 $\int_0^1|f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(t)|2t\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=2$ 另一方面, 取 $f_n(x)=(n+1)x^n$, 则 $\int_0^1\left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$, 而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=2\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2\quad(n\to\infty)$$

因此最小的实数 $C=2$ 。

六、解法 **1**　记 $g=g(t)=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 则 $\Omega$ 在 $xy$ 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant g$ 。在曲线 $S:\begin{cases}x^2+y^2=z\\x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$ 上任取一点 $(x,y,z)$, 则原点到该点的射线和 $z$ 轴的夹角为 $\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}$ 。取 $\Delta t>0$, 则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$。对于固定的 $t>0$, 考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$, 这是一个在厚度为 $\Delta t$ 的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线

和 $z$ 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 $\theta_t$ 之间。我们使用球坐标变换来做这个积分, 由积分的连续性可知, 存在 $\alpha=\alpha(\Delta t), \theta_{t+\Delta t} \leqslant \alpha \leqslant \theta_t$, 使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \mathrm{d}\theta \int_t^{t+\Delta t} f\left(r^2\right) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r$$

这样就有 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha) \int_t^{t+\Delta t} f\left(r^2\right) r^2 \mathrm{d}r$。而当 $\Delta t \rightarrow 0^+$ 时

$$\cos\alpha \rightarrow \cos\theta_t=\frac{g(t)}{t}, \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f\left(r^2\right) r^2 \mathrm{d}r \rightarrow t^2 f\left(t^2\right)$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right) t^2 f\left(t^2\right)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right) t f\left(t^2\right)$$

当 $\Delta t<0$ 时, 考虑 $F(t)-F(t+\Delta t)$ 可以得到同样的左导数。因此

$$F'(t)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right) t f\left(t^2\right)$$

解法 2 令 $\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{array}\right.$ 则 $\Omega:\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \\ r^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{t^2-r^2} \end{array}\right.$ 其中 $a$ 满足 $a^2+a^4=t^2$, 即 $a^2=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$。故有

$$F(t)=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r \mathrm{d}r \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f\left(r^2+z^2\right) \mathrm{d}z=2\pi \int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f\left(r^2+z^2\right) \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}r$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left(a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f\left(a^2+z^2\right) \mathrm{d}z \cdot \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\int_0^a r f\left(r^2+t^2-r^2\right) \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}} \mathrm{d}r\right)$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$, 第一个积分为 0, 我们得到

$$F'(t)=2\pi f\left(t^2\right) t \int_0^a r \frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}} \mathrm{d}r=-\pi t f\left(t^2\right) \int_0^a \frac{\mathrm{d}\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以 $F'(t)=2\pi t f\left(t^2\right)\left(t-a^2\right)=\pi t f\left(t^2\right)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$

七、证 (1) 设 $\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geqslant N$, 有

$$\begin{gathered}
\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta, \quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}, \quad a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right), \\
\sum_{n=N}^m a_{n+1} \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \leqslant \frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right) \leqslant \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N}
\end{gathered}$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$, 则存在 $N\in\mathbf{N}$, 对于任意的 $n\geqslant N$, 有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$, 于是

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 得到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

## 9 第三届全国大学生数学竞赛预赛 (2011 年非数学类)

一、计算下列各题 (本题共 4 个小题, 每小题 6 分, 共 24 分 ) (要求写出重要步骤)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$

(2) 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n\to\infty}a_n$

(3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$

（4）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

二、(本题两问, 每问 8 分, 共 16 分 ) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列 , $a,\lambda$ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

(2) 如果存在正整数 $p$, 使得 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$ 。

三、( 15 分 ) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 [-1,1] 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1, f'(0)=0$□ 求证: 在开区间 (-1,1) 内至少存在一点 $x_0$, 使得 $f'''(x_0)=3$ 。

四、(15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 $\rho$。在点 $(0,h)$ 处 ( 其中 $h>0$ ) 有一质量为 $m$ 的质点。求射线对该质点的引力。

五、(15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数, 且具有连续的二阶偏导数。求证 : $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$

六、(15 分 ) 设函数 $f(x)$ 连续 , $a,b,c$ 为常数 , $\Sigma$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 。记第一型曲面积分 $I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$。求证 : $I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}u$。

## 9.1 参考答案

一、(1) 解因为

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}=\mathrm{e}^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\mathrm{e}^2$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$$

(2) 解　若 $\theta=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 。若 $\theta\neq 0$, 则当 $n$ 充分大, 使得 $2^n>|k|$ 时

$$\begin{aligned}
a_n&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\\
&=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}
\end{aligned}$$

这时 , $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}$

（3）解设

$$D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\tfrac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2\right\},D_2=\left\{(x,y)\mid\tfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\tfrac{1}{x}\right\}$$

$$D_3=\left\{(x,y)\mid\tfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\tfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\}$$

$$\textstyle\iint_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+2\ln 2,\quad\iint_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3-2\ln 2$$

$$\textstyle\iint_D\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-4\ln 2$$

(4) 解　令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则其定义区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 。$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}$$

于是

$$S(x)=\left(\tfrac{x}{2-x^2}\right)'=\tfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}$$

二、证明 (1) 由 $\lim_{n\to\infty} a_n=a, \exists M>0$ 使得 $|a_n|\leqslant M$, 且 $\forall \varepsilon>0, \exists N_1\in \mathbf{N}$, 当 $n>N_1$ 时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $\exists N_2>N_1$, 当 $n>N_2$ 时 , $\frac{N_1(M+|a|)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ 。于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant \frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

(2) 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$, 令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$, 易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)}=\lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$$

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{p+i}}{n}=0$, 知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\cdot\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}$$

$\forall m\in\mathbf{N}, \exists n,p,i\in\mathbf{N}, 0\leqslant i\leqslant p-1$, 使得 $m=np+i$, 且当 $m\to\infty$□, $n\to\infty$, 所以 , $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$

三、证明由麦克劳林公式, 得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

$\eta$ 介于 0 与 $x$ 之间 , $x\in[-1,1]$ 。在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$, 得

$$\begin{aligned}1=f(1)=f(0)+\tfrac{1}{2!}f''(0)+\tfrac{1}{3!}f'''(\eta_1), &\quad 0<\eta_1<1\\ 0=f(-1)=f(0)+\tfrac{1}{2!}f''(0)-\tfrac{1}{3!}f'''(\eta_2), &\quad -1<\eta_2<0\end{aligned}$$

两式相减, 得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$$

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 [-1,1] 上连续, 因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 $M$ 和最小值 $m$, 从而

$$m\leqslant\frac{1}{2}\left(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\right)\leqslant M$$

再由连续函数的介值定理, 至少存在一点 $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1,1)$, 使得

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2}\left(f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)\right) = 3$$

四、解在 $x$ 轴的 $x$ 处取一小段 $\mathrm{d}x$, 其质量是 $\rho \mathrm{d}x$, 到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$, 这一小段与质点的引力是 $\mathrm{d}F = \frac{Gm\rho \mathrm{d}x}{h^2+x^2}$( 其中 $G$ 为万有引力常数 ) 。这个引力在水平方向的分量为 $\mathrm{d}F_x = \frac{Gm\rho x \mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 从而

$$F_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x \mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{Gm}\,\rho}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\,\mathrm{Gm}\,\rho\left(h^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

而 $\mathrm{d}F$ 在竖直方向的分量为 $\mathrm{d}F_y = -\frac{Gm\rho h \mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 故

$$\begin{aligned} F_y &= \int_a^{+\infty} -\frac{Gm\rho h \mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t}{h^3 \sec^3 t}\mathrm{d}t = -\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right) = \frac{Gm\rho}{h}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}-1\right) \end{aligned}$$

所求引力向量为 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ 。

五、解对方程两边求导

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\right)F_1' + \frac{\partial z}{\partial x}F_2' = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}F_1' + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y^2}\right)F_2' = 0$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'}{x^2\left(F_1'+F_2'\right)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_2'}{y^2\left(F_1'+F_2'\right)}$$

所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

将上式再求导

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2x\frac{\partial z}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$$

相加得到

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0$$

六、解　由 $\Sigma$ 的面积为 $4\pi$ 可见: 当 $a,b,c$ 都为零时, 等式成立。当它们不全为零时, 可知: 原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

设平面 $P_u: u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, 其中 $u$ 固定, 则 $|u|$ 是原点到平面 $P_u$ 的距离, 从而 $-1 \leqslant u \leqslant 1$, 被积函数取值为 $f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$ 。两平面 $P_u$ 和 $P_{u+\mathrm{d}u}$ 截单位球 $\Sigma$ 的截下的部分, 这部分摊开可以看成一个细长条。这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$, 宽是 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, 它的面积是 $2\pi\mathrm{d}u$, 得证。

## 10　第二届全国大学生数学竞赛预赛 (2010 年非数学类)

一、计算下列各题 (本题共 5 个小题, 每小题 5 分, 共 25 分 ) (要求写出重要步骤)

(1) 设 $x_n=(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)$ , 其中 $|a|<1$, 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 。

(2) 求 $\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

(3) 设 $s>0$, 求 $I_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{s}x}x^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数 , $r=\sqrt{x^2+y^2}, g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$ , 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ 。

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离。

二、(15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x)>0, \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0, \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$$

且存在一点 $x_0$, 使得 $f\left(x_0\right)<0$ 。证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根

三、(15 分) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}, t>-1$$

所确定, 且 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切。求函数 $\psi(t)$ 。

四、( 15 分 ) 设 $a_n>0, S_n=\sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛 ;

(2) 当 $\alpha\leqslant 1$, 且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

五、(15 分) 设 $l$ 是过原点、方向为 $(\alpha,\beta,\gamma)$ (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ ) 的直线, 均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$( 其中 $0<c<b<a$, 密度为 1 ) 绕 $l$ 旋转。

（1）求其转动惯量;

（2) 求其转动惯量关于方向 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 的最大值和最小值。

六、(15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 $C$ 上, 曲线积分 $\oint_C\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数。

(1) 设 $L$ 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 。证明 : $\oint_L\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$ 。

（2) 求函数 $\varphi(x)$ 。

(3) 设 $C$ 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 。

## 10.1 参考答案

一、(1) 解将 $x_n$ 恒等变形

$$\begin{aligned} x_n &= (1-a)\cdot(1+a)\cdot\left(1+a^2\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{1-a} \\ &= \left(1-a^2\right)\cdot\left(1+a^2\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{1-a} \\ &= \left(1-a^4\right)\cdot\left(1+a^4\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+a^{2^n}\right)\cdot\frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \end{aligned}$$

由于 $|a|<1$, 可知 $\lim_{n\to\infty} a^{2^{n+1}} = 0$, 从而 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-a}$ 。

(2) 解 $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \mathrm{e}^{-1}\right]^x = \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right]x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

（3) 解法 **1**　因为 $s>0$ 时 , $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-sx}x^n = 0$, 所以

$$I_n = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{d}\mathrm{e}^{-sx} = -\frac{1}{s}\left[x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{sx}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{sx}}\mathrm{d}x^n\right] = \frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得到

$$I_n = \frac{n}{s}I_{n-1} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n=2} = \cdots = \frac{n!}{s^n}I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

解法 2　令 $t=sx$, 则 $\mathrm{d}t = s\mathrm{d}x$, 于是

$$I_n = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(4) 解因为 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性有

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)$$

(5) 解　直线 $l_1$ 的对称式方程为 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ 。记两直线的方向向量分别为 $l_1 = (1,1,0), l_2 = (4,-2,-1)$, 两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0)$ 和 $P_2(2,1,3), a = \overline{P_1P_2} = (2,1,3)$ 。$l_1\times l_2 = (-1,1,-6)$ 。由向量的性质可知, 两直线的距离

$$d = \left|\frac{a\cdot(l_1\times l_2)}{|l_1\times l_2|}\right| = \frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}} = \frac{19}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

二、证法 1　由 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha > 0$ 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$. 由 $f''(x) > 0$ 知 $y = f(x)$ 是凹函数, 从而

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), x > a$$

当 $x \to +\infty$ 时

$$f(a)+f'(a)(x-a) \to +\infty,$$

故存在 $b>a$, 使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$$

同样, 由 $\lim f'(x)=\beta<0$, 必有 $c<x_0$, 使得 $f'(c)<0$ 。由 $f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数, 从而

$$f(x)>f(c)+f'(c)(x-c), x<c$$

当 $x \to -\infty$ 时

$$f(c)+f'(c)(x-c) \to +\infty$$

故存在 $d<c$, 使得

$$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$$

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理, $\exists x_1 \in (x_0,b)\,, x_2 \in (d,x_0)$ 使得 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$ 。下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根。用反证法。假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 3 个实根, 不妨设为 $x_1,x_2,x_3$ 且 $x_1<x_2<x_3$ 。用 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用罗尔定理, 则各至少存在一点 $\xi_1\left(x_1<\xi_1<x_2\right)$ 和 $\xi_2\left(x_2<\xi_2<x_3\right)$, 使得 $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)=0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用罗尔定理, 则至少存在一点 $\eta\left(\xi_1<\eta<\xi_2\right)$, 使 $f''(\eta)=0$ 。此与条件 $f''(x)>0$ 矛盾。从而方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不能多于两个根。

证法 2 先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根。由 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$, 必有一个充分大的 $a>x_0$, 使得 $f'(a)>0$ 。因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 均连续。由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有

$$\begin{aligned}
f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)] &= f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \\
&= f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a) \\
&= \left[f'(\xi)-f'(a)\right](x-a) \\
&= f''(\eta)(\xi-a)(x-a)
\end{aligned}$$

其中 , $a<\xi<x, a<\eta<x$, 注意到 $f''(\eta)>0$ ( 因为 $f''(x)>0$) , 则

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a), x>a$$

又因 $f'(a)>0$, 故存在 $b>a$, 使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$$

又已知 $f\left(x_{0}\right)<0$, 由连续函数的中间值定理, 至少存在一点 $x_{1}\left(x_{0}<x_{1}<b\right)$ 使得 $f\left(x_{1}\right)=0$, 即方程 $f(x)=0$ 在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上至少有一个根 $x_{1}$ 。同理可证方程 $f(x)=0$ 在 $\left(-\infty, x_{0}\right)$ 上至少有一个根 $x_{2}$ 。下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根。(以下同证法 1 )

三、解因为

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{~d} x}=\frac{\psi^{\prime}(t)}{2+2 t}, \frac{\mathrm{d}^{2} y}{\mathrm{~d} x^{2}}=\frac{1}{2+2 t} \cdot \frac{(2+2 t) \psi^{\prime \prime}(t)-2 \psi^{\prime}(t)}{(2+2 t)^{2}}=\frac{(1+t) \psi^{\prime \prime}(t)-\psi^{\prime}(t)}{4(1+t)^{3}}$$

由题设 $\frac{\mathrm{d}^{2} y}{\mathrm{~d} x^{2}}=\frac{3}{4(1+t)}$, 故 $\frac{(1+t) \psi^{\prime \prime}(t)-\psi^{\prime}(t)}{4(1+t)^{3}}=\frac{3}{4(1+t)}$, 从而

$$(1+t) \psi^{\prime \prime}(t)-\psi^{\prime}(t)=3(1+t)^{2}$$

即

$$\psi^{\prime \prime}(t)-\frac{1}{1+t} \psi^{\prime}(t)=3(1+t)$$

设 $u=\psi^{\prime}(t)$, 则有 $u^{\prime}-\frac{1}{1+t} u=3(1+t)$, 故

$$\begin{aligned}
u & =\mathrm{e}^{\int \frac{1}{1+t^{d}}}\left[\int 3(1+t) \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{1+t^{d}} \mathrm{d} t+C_{1}}\right] \\
& =(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1} \mathrm{d} t+C_{1}\right]=(1+t)\left(3 t+C_{1}\right) \\
\psi(t) & =\int(1+t)\left(3 t+C_{1}\right) \mathrm{d} t=\int\left(3 t^{2}+\left(3+C_{1}\right) t+C_{1}\right) \mathrm{d} t=t^{3}+\frac{3+C_{1}}{2} t^{2}+C_{1} t+C_{2}
\end{aligned}$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_{1}^{t^{2}} \mathrm{e}^{-u^{2}} \mathrm{d} u+\frac{3}{2 \mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切知 $\psi(1)=\frac{3}{2 \mathrm{e}}, \psi^{\prime}(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$ 。所以 $\left.u\right|_{t=1}=\psi^{\prime}(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$, 由此知 $C_{1}=\frac{1}{\mathrm{e}}-3$。由 $\psi(1)=\frac{3}{2 \mathrm{e}}$, 知 $C_{2}=2$. 于是

$$\psi(t)=t^{3}+\frac{1}{2 \mathrm{e}} t^{2}+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right) t+2, t>-1$$

四、证明　令 $f(x)=x^{1-a}, x \in\left[S_{n-1}, S_{n}\right]_{0}$ 将 $f(x)$ 在区间 $\left[S_{n-1}, S_{n}\right]$ 上用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in\left(S_{n-1}, S_{n}\right)$, 使

$$f\left(S_{n}\right)-f\left(S_{n-1}\right)=f^{\prime}(\xi)\left(S_{n}-S_{n-1}\right)$$

即

$$S_{n}^{1-a}-S_{n-1}^{1-a}=(1-\alpha) \xi^{-a} a_{n}$$

(1) 当 $\alpha>1$ 时

$$\frac{1}{S_{n-1}^{a-1}}-\frac{1}{S_{n}^{a-1}}=(\alpha-1) \frac{a_{n}}{\xi^{a}} \geqslant(\alpha-1) \frac{a_{n}}{S_{n}^{a}}$$

显然 $\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{a-1}}-\frac{1}{S_{n}^{a-1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和有界, 从而收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n}}{S_{n}^{a}}$ 收敛。

（2) 当 $\alpha=1$ 时, 因为 $a_n>0, S_n$ 单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n \rightarrow+\infty$, 对任意 $n$, 当 $p \in \mathbf{N}, \frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$, 从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \frac{1}{2}$ 。所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^a}$ 发散。当 $\alpha<1$ 时 , $\frac{a_n}{S_n^a} \geqslant \frac{a_n}{S_n}$。由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法 , $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^a}$ 发散。

五、解 (1) 设旋转轴 $l$ 的方向向量为 $l=(\alpha, \beta, \gamma)$, 粗球内任意一点 $P(x, y, z)$ 的径向量为 $r$, 则点 $P$ 到旋转轴 $l$ 的距离的平方为

$$d^2=r^2-(r \cdot l)^2=\left(1-\alpha^2\right) x^2+\left(1-\beta^2\right) y^2+\left(1-\gamma^2\right) z^2-2 \alpha \beta x y-2 \beta \gamma y z-2 \alpha \gamma x z$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega}(2 \alpha \beta x y+2 \beta \gamma y z+2 \alpha \gamma x z) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=0, \quad \Omega=\left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$$

而

$$\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\int_{-a}^a x^2 \mathrm{d} x \quad \iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}} \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\int_{-a}^a x^2 \cdot \pi b c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d} x=\frac{4 a^3 b c \pi}{15}$$
$$\left(\text{或} \iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\int_0^{2 \pi} \mathrm{d} \theta \int_0^\pi \mathrm{d} \varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin ^2 \varphi \cos ^2 \theta \cdot a b c r^2 \sin \varphi \mathrm{d} r=\frac{4 a^3 b c \pi}{15}\right)$$
$$\iiint_{\Omega} y^2 \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\frac{4 a b^3 c \pi}{15}, \quad \iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\frac{4 a b c^3 \pi}{15}$$

由转动惯量的定义

$$J_l=\iiint_{\Omega} d^2 \mathrm{d} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z=\frac{4 a b c \pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right) a^2+\left(1-\beta^2\right) b^2+\left(1-\gamma^2\right) c^2\right]$$

（2) 考虑目标函数

$$V(\alpha, \beta, \gamma)=\left(1-\alpha^2\right) a^2+\left(1-\beta^2\right) b^2+\left(1-\gamma^2\right) c^2$$

在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值。设拉格朗日函数为

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)=(1-\alpha) a^2+\left(1-\beta^2\right) b^2+\left(1-\gamma^2\right) c^2+\lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

令

$$L_a=2 \alpha\left(\lambda-a^2\right)=0, \quad L_\beta=2 \beta\left(\lambda-b^2\right)=0, \quad L_\gamma=2 \gamma\left(\lambda-c^2\right)=0, \quad L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$$

解得极值点为

$$Q_1\left( \pm 1,0,0, a^2\right), \quad Q_2\left(0, \pm 1,0, b^2\right), \quad Q_3\left(0,0, \pm 1, c^2\right)$$

比较可知, 绕 $z$ 轴 ( 短轴 ) 的转动惯量最大, 为 $J_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$; 绕 $x$ 轴 ( 长轴 ) 的转动惯量最小, 为

$$J_{\min}=\frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$$

六、解 (1) 设 $\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$, 闭曲线 $L$ 由 $L_i(i=1,2)$ 组成。设 $L_0$ 为不经过原点的光滑曲线, 使得 $L_0\cup L_1^-$ (其中 $L_1^-$ 为 $L_1$ 的反向曲线) 和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i\ (i=1,2)$ 。由曲线积分的性质和题设条件

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I-I=0\end{aligned}$$

(2) 设 $P(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2}, Q(x,y)=\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$ 。令 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 即 $\frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}$, 角得 $\varphi(x)=-x^2$ 。

(3) 设 $D$ 为正向闭曲线 $C_\delta: x^4+y^2=\delta^2$ 所围区域, 由已知条件及 ( 2 )

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

利用格林公式和对称性

$$\oint_{C_\delta}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta}2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{\delta^2}\iint_D(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

## 11 第一届全国大学生数学竞赛预赛 (2009 年非数学类)

一、填空题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分 )

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________, 其中区域 $D$ 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域。

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$, 则 $f(x)=$ ________

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ________

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$ 确定, 其中 $f$ 具有二阶导数, 且 $f'\neq 1$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________

二、( 5 分 ) 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 $n$ 是给定的正整数

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续 , $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, $A$ 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

四、(15 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\}$, $L$ 为 $D$ 的正向边界, 试证: (1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$

五、(10 分) 已知

$$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},\quad y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},\quad y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程。

六、(10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$ 试确定 $a,b,c$, 使此图形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积 $V$ 最小。

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $u_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

八、( 10 分) 求 $x\to 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

## 11.1 参考答案

一、(1) 解　取变换 $u=x+y, v=x$, 则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,

$$\text{原积分}=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^u \frac{u\ln u-u\ln v}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}v=\frac{16}{15}$$

(2) 解令 $a=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=3x^2-a-2$, 两端积分解出 $a=\frac{4}{3}$, 从而得 $\Rightarrow f(x)=3x^2-\frac{10}{3}$

（3）解　曲面的法向量为 $n=(x,2y,-1)$, 则切点处的法向量平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量 $(2,2,-1)$, 因此对应坐标成比例 $\frac{2}{x}=\frac{2}{2y}=\frac{-1}{-1}$, 得切点为 $(2,1,1)$, 从而得切平面为 $2x+2y-z-5=0$.

(4) 解方程两端对 $x$ 求导可得　$y'=\frac{\mathrm{e}^{f(y)}}{(1-f'(y))\mathrm{e}^y\ln 29}=\frac{1}{x(1-f'(y))}$, 再求导得

$$y''=-\frac{(1-f'(y))-xf''(y)y'}{x^2\left(1-f'(y)\right)^2}=-\frac{\left(1-f'(y)\right)^2-f''(y)}{x^2(1-f(y))^3}$$

二、解

$$\text{原式}=\operatorname{limexp}_{x\to 0}\left\{\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}\right)-\ln n\right)}{x}\right\}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}\right)-\ln n\right)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}\right)}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}\\&=\frac{\mathrm{e}(1+2+\cdots+n)}{n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)\mathrm{e}\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式}=\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

三、解　由题设, 知 $f(0)=0, g(0)=0$ 。令 $u=xt$, 得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, x\neq 0$$

而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, x\neq 0$$

由导数的定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

另外

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

四、证法 1 由于区域 $D$ 为一正方形, 可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算。(1) 左边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x$ 右边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x$ 所以

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\mathrm{siny}}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}y=\oint_L x\mathrm{e}^{-\mathrm{siny}}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$$

(2) 由泰勒公式得 $\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2+\sin^2 x$, 故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\mathrm{sin}y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\geqslant\pi\int_0^\pi\left(2+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\pi^2$$

证法 2 （1）根据格林公式, 将曲线积分化为区域 $D$ 上的二重积分

$$\begin{aligned}&\oint_L x\mathrm{e}^{\mathrm{siny}}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma\\&\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

因为关于 $y=x$ 对称, 所以

$$\iint_D\left(\mathrm{e}^{\mathrm{siny}}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{sin}y}+\mathrm{e}^{\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma$$

故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\mathrm{siny}}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\mathrm{sin}y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$$

(2) 由 $\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}=2\sum_{n=0}^\infty\frac{t^{2n}}{(2n)!}\geqslant 2+t^2$, 有

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}\sigma\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$$

五、解　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识, 由题设可知 $2y_1-y_2-y_3=\mathrm{e}^{2x}$ 与 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{-x}$ 是相应齐次方程两个线性无关的解, 且 $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的一个特解, 因此可以用下述两种解法。解法 1 设此方程式为

$$y''-y'-2y=f(x)$$

将 $y=x\mathrm{e}^x$ 代入上式, 得

$$f(x)=(x\mathrm{e}^x)''-(x\mathrm{e}^x)'-2x\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$ 。解法 2 设 $y=x\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是所求方程的通解，由

$$y'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+2C_1\mathrm{e}^{2x}-C_2\mathrm{e}^{-x},\quad y''=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+4C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

消去 $C_1,C_2$ 得所求方程为 $y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$

六、解因抛物线过原点, 故 $c=1$ 。由题设有

$$\int_0^1\left(ax^2+bx\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$$

即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$, 而

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\left(ax^2+bx\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)\\&=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(1-a)^2\right]\end{aligned}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$$

得 $a=-\frac{5}{4}$, 代人 $b$ 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$, 所以 $y\geqslant 0$ 。又因 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{2}}=\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况, 当 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=1$ 时, 体积最小。

七、解　先解一阶常系数微分方程, 求出 $u_n(x)$ 的表达式, 然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和。由已知条件可知 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程, 故其通解为

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right)$$

由条件 $u_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$, 得 $C=0$, 故 $u_n(x)=\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 其收敛域为 $[-1,1)$, 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

故

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$$

当 $x=-1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln 2$$

于是, 当 $-1 \leqslant x < 1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -\mathrm{e}^x \ln(1-x)$$

八、解　$\int_0^{+\infty} x^{x^2} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t$, 故有

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$